

① 95.12(5) 1-4 1995/197287-5/012/015
量子场论的数学物理与物理数学

赵树松

潘留仙

(云南大学物理系,昆明强子动力学研究组) (湖南益阳师专)

0413.3

0572.3

摘 要 本文简要综述了1970—1989年量子场论及强子物理研究存在的12个疑团。

关键词 量子场论, 强子物理

数学物理, 物理数学

1118

重整化的量子场

$$\Phi_R(x) = V^{-\frac{1}{2}} \sum_k [a_k f_k^*(x) + a_k^\dagger f_k(x)] \quad \text{Bose} \quad (1)$$

$$\Psi_R(x) = V^{-\frac{1}{2}} \sum_k [b_k f_k^*(x) + b_k^\dagger f_k(x)] \quad \text{Fermi} \quad (2)$$

这里单粒子真空跃迁幅^[1]

$$\langle O | \Phi_{int}^n | k \rangle = g_I(x) \cdot \frac{Z_B^{-1/2}(g_R)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp[-ikx] \quad (3)$$

$$\langle O | \Psi_{int}^n | k \rangle = g_I(x) \cdot \frac{Z_F^{-1/2}(g_R)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp[-ikx] \quad (4)$$

从(1)(2)到(3)(4)已经用到必不可免的程序

$$V^{-\frac{1}{2}} \sum_{k_n} \leftrightarrow (2\pi)^{-3/2} \iiint d^3k \quad (5)$$

在广函表达式(3)(4)中无穷可微的好函数 $g_I(x)$ 至今没有物理解释, 在古典数学里令(3)(4)中的 $g_I(x) = 1$, 但平面波的归一化为 $\delta(x-x')$ 或 $\delta(k-k')$ 包含着错误的积分交换运算, 而且使得跃迁几率中出现 $\delta^{(4)}(k)$ 平方的因子

$$|S(k, k')| \sim |\delta^{(4)}(k-k')|^2 \quad (6)$$

这里能量-动量守恒条件

$$\delta^{(4)}(k-k') \equiv \iiint e^{i(k-k')x} \cdot d^4x \quad (7)$$

$$|\delta^{(4)}(k-k')| \equiv V \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty \quad (8)$$

量子化程序(5)将可数 Hilbert 空间 $H - |k_n\rangle$ 过渡到不可数 Hilbert 空间 $H - |k_\infty\rangle$, 这两个空间具有不同的基数(Cardinal Number):

$$\text{Card}[H - |k_n\rangle] = \aleph \text{Card}[H - |k_\infty\rangle] = 2^{\aleph_0} \quad (9)$$

而且具有显著不同的维度(Dimensiongrad):

$$\text{Dim}[H - |k_n\rangle] = 1 \quad \text{Dim}[H - |k_\infty\rangle] = +\infty \quad (10)$$

生灭算子满足渐近条件

* 收稿日期: 1995-01-26

云南省基础研究基金资助

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle a | a_s(t) | b \rangle = Z_B^{1/2}(g_R) \langle a | a_{kout} | b \rangle \quad (11)$$

在 D^0 维物理时空 $S_T^{D^0}(x)$ 中,公理化理论框架的场算子积

$$(\Phi_R(x_1)\Phi_R(x_2), g_I(x)g_I(x)) \quad (12)$$

这里好函数(试验函数)可以为

$$\left(\prod_{v=1}^{D^0} I_v\right) g_I(x) = \prod_{v=1}^{D^0} \exp[-(x_v - x'_v)^2 / 2I_v^2] (2\pi)^{-D^0/2} \quad (13)$$

在 $S_T^{D^0}(x)$ 共轭空间 $S_T^{D^0}(k)$ 中好函数

$$\left(\prod_{v=1}^{D^0} I_v^{-1}\right) g_I(k) = \prod_{v=1}^{D^0} \exp[-(k_v - k'_v)^2 I_v^2 / 2] (2\pi)^{-D^0/2} \quad (14)$$

表达式(12)中的算子值广函(“分布”)之乘积怎么定义?从(1)到(14)式,无论从物理上看还是从数学上看都是令人困惑的.量子场论从1954年起开始用 L. Schwartz 分布于 Green 函数,目前正从古典数学过渡到现代数学,而且于1970年之后加快了行进的步伐,强相互作用动力学的建立有了希望.

重整群的研究经过15年的追求,1970年建立起 Callan-Symanzik 方程(类空),后来发展为亚群对称性(1985),成为强子多重产生的理论基础. G. t' Hooft 维度正规化引入 $D = D^0(1 - \epsilon)$, $D^0 = 4$. 这里时空反常维度 ϵ 是纯数学的呢,还是物理的真实呢?量子场的反常维度 $\gamma_B(g_R)$ 与 $\gamma_F(g_R)$ 的实验已被实验所确定^[2]: $\gamma_B(g_R) = 0.045 \pm 0.015$, $\gamma_F(g_R) \simeq 0.4 \pm 0.1$, 但是它们的定义却包含着数学上的“随随便便”:

$$\gamma_B(g_R) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_B^{1/2}(g_R) \quad (15)$$

$$\gamma_F(g_R) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_F^{1/2}(g_R) \quad (16)$$

这里 $Z_B(g_R) = 1 - g_R^2 / 12\pi^2 (\ln \Lambda^2 / m^2)_{\Lambda \rightarrow \infty}$ 是个发散量, $Z_B(g_R)$ 与 $Z_F(g_R)$ 的解析性质,我们完全无知.(15)(16)确实更加令人担忧.

众所周知,非线性量子场方程求解的困难,对解的无知,是量子场论的致命焦点.而且(1) — (16)式中的疑难既是数学的,也是物理的.当前量子场论的重大疑团有:

物理数学

1. Hilbert 空间的可数性
2. 算子值分布(广函)的性状
3. 质量的数学刻画(算子?)
(时空过程,质壳)
4. 量子场的测度与具有连续阶导数的
Pauli 定理
5. $S_T^{D^0}(x)$ 的维度 $D = D^0(1 - \epsilon)$ (Fractal,
分形几何学)
6. 空时点的数学刻画
(点集拓扑)
7. 量子场 $\Phi_k(x)$ 与 $\Psi_k(x)$ 无穷可微
(C^∞ -函数类)

数学物理

1. 能量-动量连续谱?
2. $g_I(x)$ 与 $g_I(k)$ 的物理
3. 质量自由度与真空
(同位旋空间)
4. Hausdorff 测度的实验:
 $\gamma_B(g_R)$ 与 $\gamma_F(g_R)$ 的真实性?
5. 空时反常维度 ϵ 的效应:
(D^0 维仪器测 D 维物理量)
6. 定域量子场与相对论
(什么是基本场?)
7. 非线性波动微分方程的解
(需要物理辅助方程)

8. 亚群对称性的微分方程(类时)

Callan-Symanzik 方程(类空)^[3]9. 散射矩阵 $S(k, k'; g_R)$ 与截断 Green 函数 $G(g_R, \gamma_{BF}(g_R), x)$ 10. 场算子广函的乘积, 代数积 $q_i^+ a_i$, 广函积

11. 公理化场论的完整描述

12. D. Hilbert 第六问题(量子场论 \leftrightarrow 数学体系)8. 亚群对称性 $SD(n)$ 的实验

(非 Abel 亚群数学?!)

9. 费曼传播子的收敛形^[4]状, $\Delta_R^F(k-k')$, $\Delta_R^F(x-x')$

10. 找出强作用的规律, 总结唯象研究(二、三个原理)

11. M. Born 几率的新性质 (Intermittency)

12. 量子场相互作用的分类原理是什么?

如果量子场具有 Hausdorff 测度^[5], $T(\lambda) = \exp[\lambda x \partial / \partial x]$ 是亚群变换(无穷阶微分算子)则

$$T(\lambda_B) \Phi_R(x) = \text{Dim}[Z_B^{-1/2}(g_R)] \Phi(x) + Z_B^{-1/2}(g_R) \Phi(x + \lambda x) \quad (17)$$

$$T(\lambda_F) \Psi_R(x) = \text{Dim}[Z_F^{-1/2}(g_R)] \Psi(x) + Z_F^{-1/2}(g_R) \Psi(x + \lambda x) \quad (18)$$

具有有序参数的亚群无穷小算子

$$\hat{D} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{T(\lambda) - T(0)}{\lambda} = x \frac{\partial}{\partial x} \quad (19)$$

相互作用量子场的作用量

$$I(g_R, D) = \int d^D x S_I(x) = i g_R \int \Phi \Psi \Psi d^{D^0} x \quad (20)$$

其维度 $\text{Dim}[I(g_R, D^0)] = 0$, 且 $\text{Dim}[\Psi] = \text{Dim}[\Phi]$, 将(17)-(19)代入(20)则亚群不变性要求

$$x \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) = d_B^0 \Phi(x) \quad x \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) = d_F^0 \Psi(x) \quad (21)$$

$$\text{Dim}[I] = Z \text{Dim}[\Psi] + \text{Dim}[\Phi] + D^0 \quad (22)$$

这时(21)可叫维度方程, (19)定义了维度算子, 显然 $\Phi_R(x)$ 是 $Z_B^{-1/2}(g_R)$ 与 $\Phi(x)$ 的直乘积, 因此(17)(18)式成立, 注意 $Z_{BF}(g_R)$ 是 0-量纲的, 维度与量纲是两个概念, 将 $\Phi_R(x)$ 理解为映射 $Z_B^{-1/2}(g_R) | : \Phi \rightarrow \Phi_R^{[2]}$, $Z_B^{-1/2}(g_R)$ 具有 Hausdorff 测度则量子场的 Hausdorff 维度

$$\text{Dim}[\Phi_R(x)] = d_B \Phi_R(x) \quad d_B = d_B^0 - \gamma_B(g_R) \quad (23)$$

$$\text{Dim}[\Psi_R(x)] = d_F \Psi_R(x) \quad d_F = d_F^0 - \gamma_F(g_R) \quad (24)$$

这里已用到定义 $\text{Dim}[Z_{BF}(g_R)] = 2\gamma_{BF}(g_R)$, 辅助方程(21)与 Hausdorff 测度的性质导致截断 Green 函数(广函)的亚群不变性微分方程

$$\left[\sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^{D^0} x_i^v \frac{\partial}{\partial x_i^v} + \mathcal{D}_0 \right] G_{(x_B, x_F)}^{(N)} = [N_F \gamma_F(g_R) + N_B \gamma_B(g_R)] G_{(x_B, x_F)}^{(N)} \quad (25)$$

这里 $\mathcal{D}_0 = \beta(g_R) \partial / \partial g_R - \gamma_m(g_R) m_R \partial / \partial m_R$, $\beta(g_R) = \text{Dim}[g_R]$, $\gamma_m(g_R) = \text{Dim}[m_R]$, 方程(25)中令 $\mathcal{D}_0 = a \partial / \partial a$ 则得 $G^{(N)}(x)$ 的拟齐次广函解^{[1][5][6]},

(20)对应的非齐次波动方程为

$$\left[(\nabla^2 - \partial^2) - O^{*2} \right] \Phi(x) = -g_R \bar{\Psi} \Psi \quad (26)$$

$$\left[\Sigma \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + O^* \right] \Psi(x) = g_R \bar{\Psi}(x) \Phi(x) \quad (26')$$

令 $x_v = \ln Z_v$ 则 $\nabla^2 - \partial^2 = \Sigma g_{\mu\nu} Z_\nu \partial / \partial Z_\nu \cdot Z_\nu \frac{\partial}{\partial Z_\nu}$, 当 $Z_\nu = 1 + x_v^*$ 时, 注意 $x_v = \ln(1 + x_v^*) = x_v^* (x_v^* \rightarrow 0)$ 及量子场的连通性, 立刻得到与(25)一致的非线性方程(26)(26')的特解,

$S_T^0(x)$ 的 Hausdorff 测度必须保证光维的维度与类空类时区相同, 光维顶点是 O -维开闭曲面——这个现行点集拓扑概念, 数学上对不对? 孤立点与拓扑点的区别是什么? 一维点、二维点、 D^0 -维点、 D -维点的数学刻画, 这是量子场定域性的立锥之地, 糊涂不得^[3]。

方程(25)与大量 Multihadron Physics 实验数据符合, 其数学问题值得研究, 重整化与正规化的数学要求 $D=D^0(1-\epsilon)$, 时空反常维度(ϵ)效应需要从理论与实验两个方面去探索。对于强相互作用量子场论, D. Hilbert 第六问题的答案应当是肯定的。

参考文献

- [1] 赵树松,《量子场的物理原理》(1989.4月)
- [2] S. S. Zhao,《Multiparticle Production》Proc. of Shandong Workshop. 497 (June 28—July 6, 1987) Singapore, World Scientific
- [3] 赵树松, 屈超纯,《现代物理的数学进展》, 云南大学学报 3(1989)214—222
- [4] 赵树松, 杨庆文, 云南大学学报 1(1988)14—23
- [5] 赵树松, 彭守礼,《科学通报》Vol. 26, No. 11(1981)977—983(英文版)
- [6] 赵树松, 彭守礼,《科学通报》Vol. 31, No. 3(1986)161—169(英文版)

Mathematical Physics and Physical Mathematics of Quantum Field Theory

Zhao Shusun

Pan Liuxian

(Department of physics, Yunan University, (Department of physics, Yiyang Teachers
Kunming Collaboration of Multihadron Dy- College, Hunan)
namics)

Abstract In this paper, twelve suspicious are Summarized briefly in quantum field theory and Multihadron physics from 1970 untill 1989.

Key words quantmn field theory; Multihadron physics